

5. artikel

Modelleringskompetence



Klaus Fink



Mikael Skånstrøm

Af Klaus Fink, konsulent klaus.fink@dkmat.dk

og Mikael Skånstrøm, lærer, VIAUC, lærerudd. og hf i Nørre Nissum, mikael.skaanstroem@skolekom.dk

I *Matematiske fagord og formler* (UVM, 2016) rammesættes matematisk modellering som de processer, hvor eleven anvender matematik til at beskrive situationer og løse problemer fra verden omkring os, og at have modelleringskompetence i matematik betyder, at man kan opstille og vurdere matematiske modeller. En matematisk model skal her forstås som en beskrivelse af den virkelige verden med anvendelse af matematiske begreber, og selve modelleringsprocessen er på et forløb, hvor eleven anvender matematikken til at behandle situationer uden for matematikken. Processen kan have forskellige antal faser, typisk fra fire til otte.

Grundlæggende kan man altså sige, at når man bruger matematik til at beskrive og forstå virkeligheden og regne på problemer fra virkeligheden, så er det matematisk modellering.

I fagformålet for matematik angives, at eleverne kan forholde sig vurderende til matematikkens anvendelse med henblik på at tage ansvar og øve indflydelse i et demokratisk fællesskab. Matematiske modeller af varierende kompleksitet spiller en afgørende rolle i samfundets funktioner og udvikling. Kompetence til at forstå og kritisere matematiske modeller og deres anvendelse som grundlag for

beslutningstagen er derfor af betydning for fastholdelse og udvikling af vores demokrati. Matematisk modellering kan endvidere skabe forbindelse mellem elevernes erfaringer og indholdet i matematikundervisningen og bidrage til at vise matematik som middel til at beskrive, forstå, manipulere og forme vores opfattelse af verden.

Arbejdet med modellering i matematikundervisningen kan herved motivere til matematiklæring og give konkret erfaringsmæssig grundlag for læreprocessen.

Mange vil nok mene, at eleverne regner på problemer fra virkeligheden, når de løser opgaver i en kontekst, som de fx kendes fra afgangsprøverne, og det er da korrekt, men det er bare ikke så ofte, at eleverne arbejder med selv at oversætte virkelige problemer til matematik. De forholder sig også sjældent vurderende til et virkeligt problem og en matematisk behandling af det.

Matematisk modellering sætter netop fokus på forholdet mellem matematik og virkelighed. I denne artikel vil vi også beskrive progressionen i elevernes arbejde med matematisk modellering.

I indskolingen er arbejdet med matematisk modellering fokuseret på enkle hverdagssituationer, situationer som med fordel kan foregå i

hjemmet med forældrene som deltagere. Dagligdags gøremål som klokken, madlavning og borddækning kan udføres med bevidsthed om, at situationerne kan oversættes til tal og matematik.

På mellemtrinnet skal eleverne kunne deltage aktivt i flere dele af modelleringsprocessen. Modellen kan fx anskues med fire faser, som behandles senere i kapitlet her.

Ifølge Fælles Mål skal eleverne i løbet af trinforløbet kunne vurdere om de resultater, der findes frem til, er realistiske, eller om der kan være begået fejl undervejs – enten i opstillingen af modellen eller af selve beregningerne. Det er læringsmålet fra de matematiske kompetencer med undersøgelse og tolkning af modellering i hverdagssituationer, der er i fokus, mens det matematikfaglige indhold hentes i de relevante stofområder.

I udskolingen skal eleverne analysere og forholde sig vurderende til egne og andres modeller og modelleringsprocesser og kunne vurdere hele processen og ikke bare dele af den. Antallet af faser kan udvides ud over de fire ved fx at indlægge og undersøge problemformuleringer i matematiseringsprocessen – og det er ingenlunde en enkel proces bare sådan lige 'at oversætte' til matematik. Vurderingen skal omfatte afkodning, tolkning og kritisk analyse af modellen eller elementer i modellen i forhold til den del af omverden, som er modelleret. I udskolingen bør anvendes digitale værktøjer i forbindelse med simulering af fx vækstmodeller, hvor regnearket kan være et både nødvendigt og givende redskab i arbejdet med problemstillingen med at afkode, tolke og kritisk analysere de anvendte modeller.

Hvorfor modelleringskompetence i grundskolen?

Brugen af matematiske modeller inden for alle fag er i stærk vækst de seneste årtier. Derfor er det en vigtig del af elevernes almene og matematiske dannelse, at de allerede tidligt i skoleforløbet kan begynde at arbejde med matematisk modellering både produktivt skabende og kritisk vurderende. I Danmark har vi efterhånden i flere årtier lagt stor vægt på anvendelsen af matematik. Det er derfor naturligt for os at

skelne mellem problembehandlingskompetencen og modelleringskompetencen. Problembehandlingskompetencen er en mere generel kompetence, der kommer i spil i mange sammenhænge fx undersøgende arbejde, og har betydning for elevernes motivation og engagement og dermed deres læring, mens modelleringskompetencen kommer i spil som levering "ud af huset" med matematiske modeller til løsning af praktiske problemer i hverdagen. I en del andre lande er de to nævnte kompetencer nærmest smeltet sammen på grundskoleniveau, og i øvrigt er der i flere lande ikke stort fokus på anvendelsen af matematik i grundskolen.

Det er centralt, at eleverne erfarer, at matematiske modeller kun beskriver dele af virkeligheden. Det er ikke hele virkeligheden, og de forskellige modeller er ikke alle lige gode. Fx har der i den seneste tid været meget offentlig debat om den manglende kvalitet i finansministeriets økonomiske modeller, der alle er matematiske modeller.

Lige som med de andre matematiske kompetencer skal de kombineres med de matematiske stofområder, når der skal planlægges, gennemføres og evalueres undervisning. I den sammenhæng spiller statistik og sandsynlighed en særlig rolle, da det faglige stofområde i vidt omfang består af matematiske modeller.

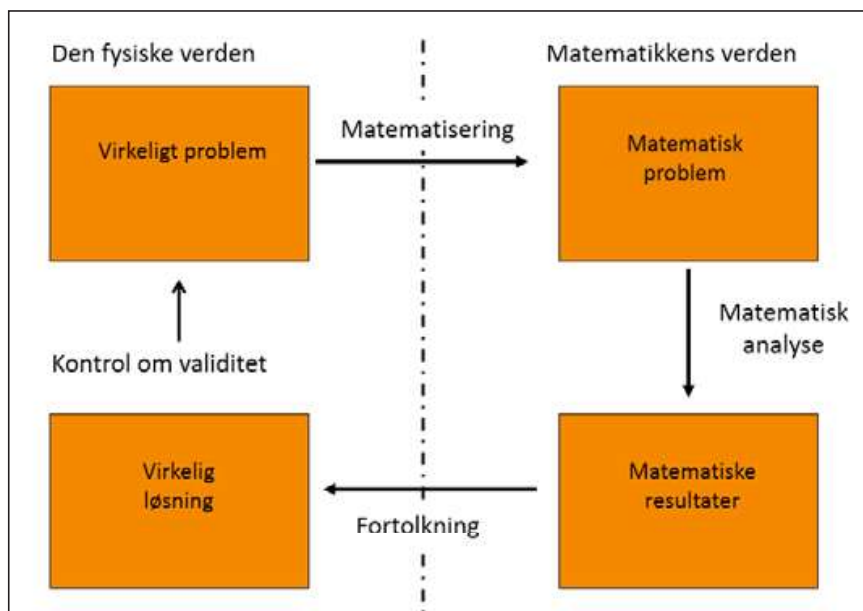
Hvordan arbejder vi med modelleringskompetence?

Arbejdet med modelleringskompetencen har både en undersøgende og en produktiv side, og ofte vil de være på banen samtidig. Det kan dog med fordel gøres klar i de enkelte dele af arbejdet, om det er den ene eller den anden del, der er i spil.

Eleverne skal på alle trinforløb kunne analysere grundlaget for og egenskaberne ved foreliggende modeller, og de skal bedømme deres rækkevidde. I en TV-udsendelse med Lasse Spang Olsen påstår han, at "*det tager 3 døgn at tælle til en million, men 165 år at tælle til en milliard!*".

Eleverne behøver således ikke selv formulere påstande for at kunne undersøge og kontrollere, hvilke modeller der må have ligget til grund for disse påstande.

Den produktive side af modelleringskompetencen, den aktive modelbygning, er ingenlunde en let sag. Det er langt fra altid, virkeligheden lige lader sig rette til, så den passer perfekt ind i den matematiske verden. Der er udarbejdet flere forskellige modeller af modelleringsprocessen med 4 eller flere trin.



Det virkelige problem kan hentes både i elevens nære omverden og i den store ustrukturerede virkelighed, men vigtigt er det, at eleverne klarer den udfordring, det er at forholde sig struktureret til virkeligheden. I KOM-rapporten anbefales at tænke modelleringsarbejdet i enten et korterevarende eller et længerevarende forløb, da tidskravene kan være vældig forskellige – afhængig af hvor krævende det er at finde eller frembringe data til modelleringsarbejdet. Det tager fx længere tid at planlægge økonomien omkring hytteturen end at finde ud af, hvor mange mennesker der kan stå i klasselokalet.

Det vanskeligste led i modelleringsprocessen synes at være begrebet matematisering – det er at oversætte virkeligheden til matematik for derefter at kunne regne på den, for nu at sige det lidt populært. Dels skal eleverne jo finde eller fremstille de data, der er anvendelige i den aktuelle situation, og dels skal de have overblik over de matematiske stofområder, der kan tænkes at komme i spil her. Og så kommer variabelbegrebet ofte i spil her – og det kan traditionelt give sine egne vanskelighe-

der, når bogstaverne blandes ind i regnestykkerne. Det kan være svært at forestille sig et problem løst, hvis man ikke bare fornemmer den matematik, der så skal sættes i spil, så her er et punkt, der virkelig kræver lærernes medarbejdende opmærksomhed. En vigtig forudsætning er, at eleverne træffer nogle valg og

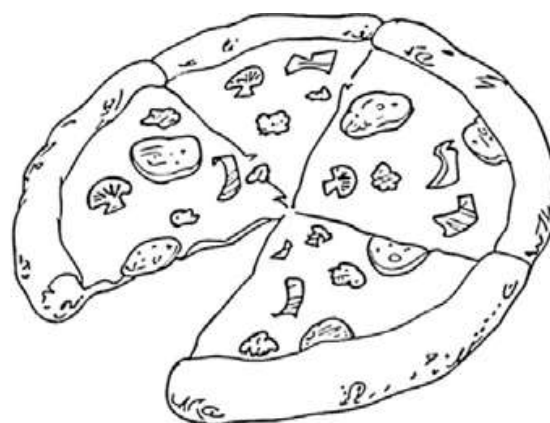
ikke mindst fravalg, for ikke alle forhold fra virkeligheden kan komme med i en matematisk model.

1. trinforløb (1. – 3. klasse)

I det første trinforløb skal der lægges vægt på elevernes anvendelse af matematik til undersøgelse og behandling af enkle hverdagsituationer, der befinder sig uden for matematikken. Færdighedsmålene i modelleringskompetencen

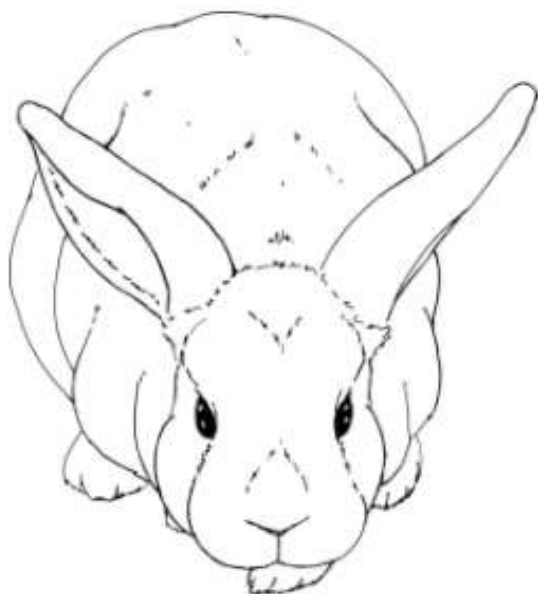
anvender begreberne 'undersøge og tolke' i de to faser, og eleverne skal igennem trinforløbet i stigende grad kunne tolke resultaterne af deres matematiske arbejde i forhold til hverdagsituationerne, og de skal kunne vurdere, om deres resultater er realistiske i forhold til det problem fra virkeligheden, de har arbejdet med. Og er det ikke realistisk skal de være i stand til at 'genstarte' modelleringsprocessen.

Eksempler Modellering og Tal og algebra



Vi er 4 i familien, og vi har lavet 3 pizzaer. Hvordan skal vi dele dem?

Modellering og Geometri og måling



Nadia vil lave en indhegning til sine kaniner ude på græsplænen.

Hun har 12 meter hegn.

Undersøg, hvordan Nadias indhegning kan se ud.

Modellering og Statistik og sandsynlighed

Dyrevæddeløbet

På gulvet eller bordene tegnes 12 baner, der er inddelt i felter. Banerne nummereres 1-12. Ved hver banes start sættes et dyr, fx en gepard på bane 1, en snegl på bane 7 og en antilope på bane 12. Eleverne udstyres med skolepenge og spiller på det dyr, de tror vil vinde væddeløbet.

På skift slår eleverne med to terninger, lægger øjnene sammen og flytter dyret på den tilsvarende bane et felt frem. Man kan gentage spillet flere gange og diskutere, hvad det mon er, der sker. Man kan fx afslutte med, at eleverne stiller dyrene op på en mere virkelighedsnær måde og afskaffer bane 1.

2. trinforløb (4. – 6. klasse)

I 2. trinforløb skal undervisningen lægge vægt på, at eleverne bliver i stand til at gennemføre enkle modelleringsprocesser. På dette trinforløb kan en simpel model af modelleringsprocessen præsenteres for eleverne, og der skal arbejdes omhyggeligt med selve matematiseringsprocessen – omsætningen fra problem-

stilling til matematik. Problemstillingerne skal hentes i elevernes hverdagsliv sammen med de omgivelser, eleverne befinder sig i.

Det betyder, at det ikke bare er egne problemstillinger, der kan være udgangspunkt for modelleringen, men også problemstillinger fra natur og samfund.

Anvendelse af matematiske modeller omfatter på dette trin både en beskrivelse af modellen og overvejelser over modellens brugbarhed i forhold til den situation, den anvendes til.

I arbejdet med modelleringen kan eleverne inddrage digitale værktøjer, som både kan anvendes i selve modelleringsprocessen og i præsentationen af overvejelserne og tolkningen af problemstillingen. De digitale værktøjer kan være regneark, CAS, dynamisk geometriprogram og et præsentationsprogram.

Modellering og Tal og algebra



I TV-programmet "Vidste du at – viden du ikke behøver..." påstår stuntmanden Lasse Spang Olsen, at man kan tælle til 1 million på 3 døgn, men at det tager 165 år at tælle til en milliard. Undersøg, hvordan Lasse Spang Olsen kan være kommet frem til netop de tal?

Modellering og Geometri og måling



Kan alle skolens elever være inde i vores klasseudendørsareal?

Modellering og Statistik og sandsynlighed

Eleverne skal vælge noget, de gerne vil undersøge, fx

- Er der flere hvide end røde biler i vores kommune?
- Er vores klasse højere end naboklasserne?

Eleverne planlægger i grupper en undersøgelse af spørgsmålet, gennemfører den og præsenterer deres resultater med statistiske deskriptorer og diagrammer samt konkluderer. Grupperne præsenterer deres undersøgelser for klassen.

3. trinforløb (7. – 9. klasse)

I 3. trinforløb vedrører matematisk modellering dels processer, hvor matematik anvendes til behandling af situationer og problemstillinger uden for matematikken, dels analyse og vurdering af matematiske modeller, som beskriver forhold i virkeligheden.

På dette trinforløb skal alle modelleringens discipliner sættes i spil i både den undersøgende og den produktive side.

I forbindelse med gennemførelse af modelleringsprocessen er elevens kompetence til at træffe valg, strukturere og afgrænse i fokus, samtidig med at der skal bygges videre på de kompetencer, der er oparbejdet på de tidligere trinforløb.

Elevernes vurdering af matematiske modeller skal omfatte afkodning, tolkning og kritisk analyse af modellen eller elementer i modellen i forhold til den del af omverdenen, som er modelleret.

I arbejdet med modelleringen kan eleverne inddrage digitale værktøjer, som både kan anvendes i selve modelleringsprocessen og i præsentationen af overvejelserne og tolkningen af problemstillingen. De digitale værktøjer kan være regneark, CAS, dynamisk geometri-program og et præsentationsprogram.

Modellering og Tal og algebra



I 2014 rasede en debat omkring antallet af flygtninge, som kom til Danmark. Partiet venstre udgav denne annonce som ifølge TV-programmet Detektor ville betyde, at der ville ankomme 2,5 mio. flygtninge til Danmark i 2030.

Partiets integrationsordfører, Martin Geertsen, udtalte om beregningerne:

”Det er ren matematik. Det har vi ikke forsøgt at lægge skjul på, og det gør Justitsministeriet heller ikke. Det er selvfølgelig krige og kriser i verden, men det, tror jeg ikke, gør denne prognose mere rigtig eller forkert.”

Problemstilling

Hvilken model har Venstre anvendt til fremskrivningen, og hvor stort vil antallet af asylansøgere være i 2050, hvis modellen er korrekt?

I skal foreslå en bedre model til fremskrivning af antallet af asylansøgere.

Modellering og Geometri og måling

På grænsen mellem Kroatien og Serbien ligger det 7 km² store/lille land, Liberland.

(<https://liberland.org>)

Der er over 100 000, der har fået 'citizenship' i det lille land.



Hvor mange 'citizens' kan Liberland's præsident optage i sit land?

Modellering og Statistik og sandsynlighed

Årets FP10 prøve opgave 2 er en nærmest eksemplarisk modelleringsopgave. Den kan findes på Materialeplatformen med det medfølgende regneark og i PRØV! Skriftlig, der er gratis tilgængeligt frem til oktober.

Evaluering

Modellering vedrører dels processer, hvor matematik anvendes til behandling af situationer og problemstillinger uden for matematikken, dels analyse og vurdering af matematiske modeller, som beskriver forhold i virkeligheden. Den ultimative evaluering, Folkeskolens prøver, har siden 1976 være to-delt for 9. klasses vedkommende. Den ene del har været en færdighedsprøve (prøve uden hjælpemidler), mens den anden med skiftende navne, Problemregning, Matematisk problemløsning og nu Prøven med hjælpemidler, er en større skriftlig prøve. I mange år siden 1986 var der et fælles tema for alle opgaverne, som fx Golsættet fra 2009 eller med en elev som omdrejningspunkt, som Simon i 2012. Tanken var, at opgaverne tog udgangspunkt i virkelige – eller næsten virkelige – situationer. Fra 2003 har ambitionen været, at de matematiske kompetencer – ikke mindst modelleringskompetencen – kunne prøves i 9. og 10. klasse.

Det er egentlig ingen nem opgave, da denne store nationale test jo skal kunne løses af alle deltagende elever inden for rammerne af en nogenlunde fastlagt opgavestruktur med ønsket om et facit, der er rimelig nemt målbart. Så var der flere og bedre muligheder for at sætte modelleringskompetencen i spil i den mundtlige prøve, der blev indført i 1996 og efter en tur i skammekrogen fra 2007 - 2012 nu er tilbage, men dog kun for ca. hver femte elev.

I modelleringsprocessen er der ofte en del undersøgende aktivitet, og når arbejdet med kompetencen Matematisk modellering indeholder, at eleverne træffer nogle valg, som selvsagt ikke behøver være de samme valg for alle elever, betyder det, at de resultater, eleverne når frem til, for det første ikke behøver være de samme, ligesom det kan være vanskeligt at formidle en arbejdsproces.

Man kan i Forlaget Matematiks nye produkt PRØV! Skriftlig finde samtlige prøvesæt fra

2010 og til i dag, både sommer- og vinterprøverne og både 9. og 10. klasse. Man kan søge på fx modellering og få alle de delopgaver fra alle prøverne, der handler om matematisk modellering og sammensætte fagligt målrettede opgavesæt til undervisningen frem for gentagne løsninger af hele tidligere prøvesæt.

De gode modelleringsopgaver

Det er vigtigt, at eleverne gennem skoleforløbet får mulighed for at gennemføre hele modelleringsprocesser. Det er tidskrævende, men giver eleverne unikke muligheder for at udvikle deres modelleringskompetence. Mundtlige prøveoplæg som nogle af de vejledende prøveeksempler på www.uvm.dk/fp er gode til et kortere modelleringsforløb, mens de lange forløb kræver andre formidlingsformer fx en matematisk rapport (som et vigtigt supplement til nærmest uendelige rækker af opgaveløsninger).

Et eksempel: NASA skrev for en del år siden, at en nedstyrtende satellit ville sprænge i mange stykker, og at sandsynligheden for at blive ramt af sådan et stykke ville være 1:3000.

Hvordan er NASA mon nået frem til det tal? Det kræver en hel del valg og fravalg. Måske skal der en del undersøgelser til, fx "Hvor stort et areal af Jorden kan man se fra 400 km højde (Anders Mogensen) eller 50 000 km (en kommunikationssatellit)". "Hvordan kan man finde overfladearealet af et menneske?"

Rapporten må gerne følges op af mundtlig fremlæggelse i klassen.

PS: Direkte adspurgt svarede Lasse Spang Olsen: *Jeg kunne i går ikke huske, hvordan vi var kommet frem til lige dét statement omkring milliarder i filmen – men var inde og se i noterne i klippebordet. Her fandt jeg faktisk den udregning der ligger til grund for vores påstand. Det ser sådan her ud i hele sin længde, hvor vi har taget højde for at det tager lang tid at tælle så lange tal: Hvis man skal tælle til en million tager det omkring 2-3 dage, hvis man skal tælle til en milliard og det i gennemsnit tager 5,2142857 sek. og sige hvert tal, vil det tage 5.214.285.700 sek., eller 86.904.761,666 min, eller 1.448.412,694 timer, eller 60.350 dage, eller 165,343 år. Om den er rigtig må dog stå i det uvisse (som så meget andet spændende) – jeg har nemlig ikke tænkt mig at efterprøve lige det...*

Kilder og inspiration

Fælles Mål og læseplanen
www.emu.dk og www.mikaelskaanstroem.dk